

Если X есть или открытое в Π множество, содержащее Σ -произведение всех пространств X_j с центром в некоторой точке произведения Π , или само X является таким Σ -произведением, то ограничение на X любой проекции pr_α является открытым и сюръективным отображением. Кроме того, пространство со счетной сетью наследственно сепарабельно и тихоновское произведение счетной системы пространств со счетной сетью является пространством со счетной сетью. Поэтому получаем

С л е д с т в и е 2. Пусть все сомножители тихоновского произведения $\Pi = \prod\{X_j : j \in J\}$ являются пространствами со счетной сетью, а подмножество X этого произведения есть или открытое в Π множество, содержащее Σ -произведение всех пространств X_j с центром в некоторой точке произведения Π , или само является таким Σ -произведением, то верны утверждения 1.-4. теоремы 4.

Поступила в редакцию 22 мая 2015 г.

Bludova I.V. ON SPACES WITH DIRECTED SYSTEMS OF OPEN MAPS

If a topological space X has a countably directed system L of open maps f_α onto hereditarily separable spaces X_α , $\alpha \in A$, and L has some natural properties, then 1. any system λ of L -cylinder subsets in X (i. e. sets of the form $f_\alpha^{-1}M$ such that $M \subset X_\alpha, \alpha \in A$) and any system μ of unions of G_δ -subsets in X contains a countable subsystem ν of λ , that is dense in λ (i.e. the closures of the unions of the systems μ and λ coincide), 2. any maps f of X onto a separable metric space may be «passed through» one of maps f_α (i.e. f is the composition of this f_α and a map of X_α). These results allow to obtain correspondent results for Tychonoff products of hereditarily separable spaces and for subspaces of Tychonoff products of spaces with a countable nets.

Key words: countably directed system of open onto maps of a topological space; Tychonoff product; Σ -product; hereditarily separable space; space with a countable net; G_δ -(Suslin property).

Блудова Ирина Валентиновна, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Основы математики и информатики» СУНЦ 1, e-mail: irina-bludova@yandex.ru

Bludova Irina Valentinovna, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Fundamentals of Mathematics and Computer Science Department, e-mail: irina-bludova@yandex.ru

УДК 517

О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО МНОЖЕСТВА В ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВА С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ

© О.М. Божинская, Н.Г. Павлова

Ключевые слова: линейные управляемые системы; множество достижимости.

В работе исследуется вопрос о топологических свойствах технологического множества в динамической модели Леонтьева с непрерывным временем, в которой управлением служит функция непродовольственного потребления. Получены необходимые условия замкнутости технологического множества.

В настоящей работе изучаются топологические свойства технологического множества в динамической модели Леонтьева с непрерывным временем. Коэффициенты матрицы прямых затрат в динамической модели включают прямые материальные затраты, возмещение выбытия и ремонт основных фондов, а зависимость размера капиталовложений от валового выпуска выражается в форме линейного акселератора Харрода. В исследуемой модели управлением служит функция непродовольственного потребления, принимающая значения в конечнопорожденном выпуклом конусе. Модель может быть применима для исследования поведения экономической системы на длительных временных интервалах при условии отсутствия технического прогресса.

В изучаемой модели производственный процесс описывается с помощью технологического множества. Технологическим множеством называется множество всех технологически допустимых векторов чистых выпусков продукции. Одним из важных (с экономической точки зрения) свойств технологического множества является его замкнутость, т.е. возможность применения «крайних» режимов производства. В данной работе получены необходимые условия замкнутости технологического множества в открытой динамической модели Леонтьева с непрерывным временем.

Формализуем поставленную задачу. Рассмотрим объект, поведение которого описывается линейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

с начальным условием

$$x(0) = 0. \quad (2)$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^* \in \mathbb{R}^n$ — n -мерный вектор фазового состояния системы, $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^* \in \mathbb{R}^m$ — m -мерный вектор управления, A — матрица $n \times n$, а B — матрица $n \times m$. Здесь и далее знак « $*$ » означает транспонирование.

Допустимым управлением будем называть всякую существенно ограниченную функцию $u(t), t \in [0, T]$, для которой $u(t) \in K$ для п. в. t , K — выпуклый конечнопорожденный конус, т. е.

$$K = \left\{ v \in \mathbb{R}^m : v = \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i, \lambda_i \geq 0, u_i \in \mathbb{R}^m, i = \overline{1, k} \right\}.$$

Здесь u_i — заданные векторы из $\mathbb{R}^m$, причем $u_i \neq \bar{0} \quad \forall i = \overline{1, k}$.

Множеством достижимости D_T в момент времени T назовем множество всех точек из фазового пространства $\mathbb{R}^n$, в которые можно перейти на отрезке времени $[0; T]$ из точки $x(0) = 0$ по решениям системы уравнений (1) при всех возможных допустимых управлениях $u(\cdot)$:

$$D_T = \{y \in \mathbb{R}^n : \exists u(\cdot) \in L_\infty[0; T], u(t) \in K \quad \forall t \in [0; T],$$

$$y = x(T), \text{ где } x(\cdot) \text{ — решение (1), (2), соответствующее } u(\cdot)\}.$$

Определим матрицы:

$$B_i = A^{i-1}B, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Следующая теорема дает условия, гарантирующие открытость множества $D_T \setminus \{0\}$.

Т е о р е м а 1 [1]. Пусть для любого $i \in \{1, 2, \dots, k\}$

$$\text{rang}\{B_1 u_i, B_2 u_i, \dots, B_n u_i\} = n. \quad (4)$$

Тогда множество $D_T \setminus \{0\}$ является открытым.

Открытая динамическая модель Леонтьева описывается системой межотраслевых балансовых соотношений (см. [2])

$$x = \tilde{A}x + \tilde{B}\dot{x} + u, \quad t \in [0, T], \quad (5)$$

с начальным условием

$$x(0) = 0. \quad (6)$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^* \in \mathbb{R}^n$ — n -мерный вектор валовых выпусков отраслей, $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^* \in \mathbb{R}^n$ — n -мерный вектор управления (вектор непроеизводственного потребления), $\tilde{A}$ — матрица $(n \times n)$ прямых затрат, а $\tilde{B}$ — матрица $(n \times n)$ прироста основных производственных фондов.

Матрица $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$, является продуктивной. Считаем также, что матрица $\tilde{B}$ является диагональной: $\tilde{B} = \text{diag}\{\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n\}$, $\tilde{b}_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, т. е. прирост выпуска каждого вида продукции пропорционален капитальным вложениям в его производство.

Допустимой функцией непроеизводственного потребления (допустимым управлением) будем называть всякую существенно ограниченную функцию $u(t), t \in [0, T]$, для которой $u(t) \in \mathbb{R}_+^n$ для п. в. t .

Технологическим множеством в момент времени T является множество

$$P_T = \left\{ (-\tilde{A}y; y) \mid y \in D_T \right\}, \quad (7)$$

где D_T — множество достижимости, т. е. множество всех возможных векторов валовых выпусков, которые можно получить на отрезке времени $[0; T]$ для модели (5), (6) при всех возможных допустимых функциях непроеизводственного потребления.

Для получения основных результатов применим теорему 1 к модели (5), (6). Заметим, что задача (5), (6) эквивалентна

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \quad t \in [0, T], \\ x(0) &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где $A = \tilde{B}^{-1}(E - \tilde{A})$, $B = -\tilde{B}^{-1}$, E — единичная матрица порядка n .

Тогда матрицы (3) для исследуемой модели имеют вид

$$B_1 = -\tilde{B}^{-1} = (b_{1ij}), \quad i, j = \overline{1, n}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} b_{1ii} &= -\tilde{b}_i^{-1}, \quad i = \overline{1, n}; \quad b_{1ij} = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n}; \\ B_2 &= \tilde{B}^{-1}(\tilde{A} - E)\tilde{B}^{-1} = (b_{2ij}), \quad i, j = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} b_{2ii} &= \left(\tilde{b}_i^{-1}\right)^2 (\tilde{a}_{ii} - 1), \quad i = \overline{1, n}; \quad b_{2ij} = \tilde{b}_i^{-1}\tilde{b}_j^{-1}\tilde{a}_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n}; \\ B_3 &= \left(\tilde{B}^{-1}(E - \tilde{A})\right)^2 \left(-\tilde{B}^{-1}\right) = -\tilde{B}^{-1}(\tilde{A} - E)B_2 = (b_{3ij}), \quad i, j = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$b_{3ij} = -\tilde{b}_i^{-1}\tilde{b}_j^{-1} \sum_{k=1}^n \tilde{b}_k^{-1} a_{ik} a_{kj}, \quad i, j = \overline{1, n},$$

$$a_{ii} = \tilde{a}_{ii} - 1, \quad i = \overline{1, n}, \quad a_{ij} = \tilde{a}_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n};$$

$$B_r = \left(\tilde{B}^{-1}(E - \tilde{A})\right)^{r-1} \left(-\tilde{B}^{-1}\right) = -\tilde{B}^{-1}(\tilde{A} - E)B_{r-1} = (b_{rij}), \quad i, j = \overline{1, n}, \quad r = \overline{4, n}, \quad (12)$$

$$b_{rij} = (-1)^r \tilde{b}_i^{-1} \tilde{b}_j^{-1} \sum_{\substack{k_l=1 \\ l=\overline{1, r-2}}}^r \prod_{l=\overline{1, r-2}} \tilde{b}_{k_l}^{-1} \prod_{l=\overline{1, r-3}} a_{k_l} a_{k_{l+1}} a_{ik_1} a_{k_{r-2}j}, \quad i, j = \overline{1, n},$$

$$a_{ii} = \tilde{a}_{ii} - 1, \quad i = \overline{1, n}, \quad a_{ij} = \tilde{a}_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Заметим также, что для рассматриваемой задачи

$$u_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad u_2 = (0, 1, \dots, 0), \quad \dots, \quad u_n = (0, 0, \dots, 1). \quad (13)$$

Тогда в силу (9) и (13) имеем

$$B_1 u_i = \left(-\tilde{b}_i^{-1}, 0, \dots, 0 \right)^*, \quad i = \overline{1, n}; \quad (14)$$

в силу (10) и (13)

$$B_2 u_i = \left(\tilde{b}_1^{-1} \tilde{b}_i^{-1} a_{1i}, \tilde{b}_2^{-1} \tilde{b}_i^{-1} a_{2i}, \dots, \tilde{b}_n^{-1} \tilde{b}_i^{-1} a_{ni} \right)^*, \quad i = \overline{1, n}, \quad (15)$$

где

$$a_{ii} = \tilde{a}_{ii} - 1, \quad i = \overline{1, n}, \quad a_{ij} = \tilde{a}_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n};$$

в силу (11) и (13)

$$B_3 u_i = \begin{pmatrix} -\tilde{b}_1^{-1} \tilde{b}_i^{-1} \sum_{k=1}^n \tilde{b}_k^{-1} a_{1k} a_{ki} \\ -\tilde{b}_2^{-1} \tilde{b}_i^{-1} \sum_{k=1}^n \tilde{b}_k^{-1} a_{2k} a_{ki} \\ \dots \\ -\tilde{b}_n^{-1} \tilde{b}_i^{-1} \sum_{k=1}^n \tilde{b}_k^{-1} a_{nk} a_{ki} \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (16)$$

где

$$a_{ii} = \tilde{a}_{ii} - 1, \quad i = \overline{1, n}, \quad a_{ij} = \tilde{a}_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n};$$

в силу (12) и (13)

$$B_r u_i = \begin{pmatrix} (-1)^r \tilde{b}_1^{-1} \tilde{b}_i^{-1} \sum_{\substack{k_l=1 \\ l=\overline{1, r-2}}}^r \prod_{l=\overline{1, r-2}} \tilde{b}_{k_l}^{-1} \prod_{l=\overline{1, r-3}} a_{k_l} a_{k_{l+1}} a_{1k_1} a_{k_{r-2}i} \\ (-1)^r \tilde{b}_2^{-1} \tilde{b}_i^{-1} \sum_{\substack{k_l=1 \\ l=\overline{1, r-2}}}^r \prod_{l=\overline{1, r-2}} \tilde{b}_{k_l}^{-1} \prod_{l=\overline{1, r-3}} a_{k_l} a_{k_{l+1}} a_{2k_1} a_{k_{r-2}i} \\ \dots \\ (-1)^r \tilde{b}_n^{-1} \tilde{b}_i^{-1} \sum_{\substack{k_l=1 \\ l=\overline{1, r-2}}}^r \prod_{l=\overline{1, r-2}} \tilde{b}_{k_l}^{-1} \prod_{l=\overline{1, r-3}} a_{k_l} a_{k_{l+1}} a_{nk_1} a_{k_{r-2}i} \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n}, \quad r = \overline{4, n}, \quad (17)$$

где

$$a_{ii} = \tilde{a}_{ii} - 1, \quad i = \overline{1, n}, \quad a_{ij} = \tilde{a}_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Отсюда получаем необходимые условия замкнутости технологического множества в рассматриваемой модели.

Т е о р е м а 2. Пусть в модели (5), (6) технологическое множество P_T замкнуто. Тогда выполнены следующие условия

$$\begin{aligned} \exists i = \overline{1, n}, \exists \alpha_j \in \mathbb{R}, j = \overline{2, n} : \sum_{j=2}^n \alpha_j^2 \neq 0, \\ \forall s = \overline{2, n} \quad \alpha_2 \tilde{b}_s^{-1} \tilde{b}_i^{-1} a_{si} + \alpha_3 \tilde{b}_s^{-1} \tilde{b}_i^{-1} \sum_{k=1}^n \tilde{b}_k^{-1} a_{sk} a_{ki} + \\ + \sum_{r=4}^n \alpha_r \tilde{b}_s^{-1} \tilde{b}_i^{-1} \sum_{k_l=1}^r \prod_{l=1, r-2} \tilde{b}_{k_l}^{-1} \prod_{l=1, r-3} a_{k_l} a_{k_{l+1}} a_{sk_1} a_{k_{r-2}i} = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где $a_{ii} = \tilde{a}_{ii} - 1$, $i = \overline{1, n}$, $a_{ij} = \tilde{a}_{ij}$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (7) из замкнутости технологического множества P_T следует замкнутость множества достижимости D_T . Тогда в силу теоремы 1 имеем

$$\exists i = \overline{1, n} : rang\{B_1 u_i, B_2 u_i, \dots, B_n u_i\} < n. \quad (19)$$

Из (14) следует, что условие (19) эквивалентно следующему

$$\exists i = \overline{1, n} : rang\{B_2 u_i, \dots, B_n u_i\} < n - 1. \quad (20)$$

В свою очередь условие (20) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\exists i = \overline{1, n}, \exists \alpha_j \in \mathbb{R}, j = \overline{2, n} : \sum_{j=2}^n \alpha_j^2 \neq 0, \sum_{j=2}^n \alpha_j B_j u_i = 0. \quad (21)$$

В силу (15) – (17) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^n \alpha_j B_j u_i = \alpha_2 \begin{pmatrix} \tilde{b}_1^{-1} \tilde{b}_i^{-1} a_{1i} \\ \tilde{b}_2^{-1} \tilde{b}_i^{-1} a_{2i} \\ \dots \\ \tilde{b}_n^{-1} \tilde{b}_i^{-1} a_{ni} \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -\tilde{b}_1^{-1} \tilde{b}_i^{-1} \sum_{k=1}^n \tilde{b}_k^{-1} a_{1k} a_{ki} \\ -\tilde{b}_2^{-1} \tilde{b}_i^{-1} \sum_{k=1}^n \tilde{b}_k^{-1} a_{2k} a_{ki} \\ \dots \\ -\tilde{b}_n^{-1} \tilde{b}_i^{-1} \sum_{k=1}^n \tilde{b}_k^{-1} a_{nk} a_{ki} \end{pmatrix} + \\ + \sum_{r=4}^n \alpha_r \begin{pmatrix} (-1)^r \tilde{b}_1^{-1} \tilde{b}_i^{-1} \sum_{k_l=1}^r \prod_{l=1, r-2} \tilde{b}_{k_l}^{-1} \prod_{l=1, r-3} a_{k_l} a_{k_{l+1}} a_{1k_1} a_{k_{r-2}i} \\ (-1)^r \tilde{b}_2^{-1} \tilde{b}_i^{-1} \sum_{k_l=1}^r \prod_{l=1, r-2} \tilde{b}_{k_l}^{-1} \prod_{l=1, r-3} a_{k_l} a_{k_{l+1}} a_{2k_1} a_{k_{r-2}i} \\ \dots \\ (-1)^r \tilde{b}_n^{-1} \tilde{b}_i^{-1} \sum_{k_l=1}^r \prod_{l=1, r-2} \tilde{b}_{k_l}^{-1} \prod_{l=1, r-3} a_{k_l} a_{k_{l+1}} a_{nk_1} a_{k_{r-2}i} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (21) следует утверждение теоремы. $\square$

Для случая $n = 2$ и $n = 3$ условия (18) имеют более простой вид.

Рассмотрим двухсекторную модель экономики

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{b}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T], \quad (22)$$

с начальным условием

$$x_1(0) = x_2(0) = 0. \quad (23)$$

Заметим, что задача (22), (23) эквивалентна следующей

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{b}_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \tilde{a}_{11} & -\tilde{a}_{12} \\ -\tilde{a}_{21} & 1 - \tilde{a}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{b}_1^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{b}_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T],$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0.$$

Тогда для рассматриваемой задачи

$$\begin{aligned} B_1 &= - \begin{pmatrix} \tilde{b}_1^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{b}_2^{-1} \end{pmatrix}, \\ B_2 &= \begin{pmatrix} \tilde{b}_1^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{b}_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} - 1 & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{b}_1^{-1} & 0 \\ 0 & \tilde{b}_2^{-1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (\tilde{b}_1^{-1})^2 (\tilde{a}_{11} - 1) & \tilde{b}_1^{-1} \tilde{b}_2^{-1} \tilde{a}_{12} \\ \tilde{b}_1^{-1} \tilde{b}_2^{-1} \tilde{a}_{21} & (\tilde{b}_2^{-1})^2 (\tilde{a}_{22} - 1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

В силу того, что $u_1 = (1, 0)^*$, $u_2 = (0, 1)^*$ имеем

$$\begin{aligned} B_1 u_1 &= \begin{pmatrix} -\tilde{b}_1^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tilde{b}_2^{-1} \end{pmatrix}, \\ B_2 u_1 &= \begin{pmatrix} (\tilde{b}_1^{-1})^2 (\tilde{a}_{11} - 1) \\ \tilde{b}_1^{-1} \tilde{b}_2^{-1} \tilde{a}_{21} \end{pmatrix}, \quad B_2 u_2 = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1^{-1} \tilde{b}_2^{-1} \tilde{a}_{12} \\ (\tilde{b}_2^{-1})^2 (\tilde{a}_{22} - 1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} rang \{B_1 u_1, B_2 u_1\} &= \begin{cases} 1, & \tilde{a}_{21} = 0, \\ 2, & \tilde{a}_{21} \neq 0, \end{cases} \\ rang \{B_1 u_2, B_2 u_2\} &= \begin{cases} 1, & \tilde{a}_{12} = 0, \\ 2, & \tilde{a}_{12} \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда и из теоремы 1 следует утверждение теоремы 3.

Т е о р е м а 3. Пусть в двухсекторной модели (22), (23) технологическое множество P_T замкнуто. Тогда $\tilde{a}_{12}\tilde{a}_{21} = 0$.

Рассмотрим трехсекторную модель экономики

$$x = \tilde{A}x + \tilde{B}\dot{x} + u, \quad t \in [0, T], \quad (24)$$

с начальным условием

$$x(0) = 0. \quad (25)$$

Здесь $x = (x_1, x_2, x_3)^* \in \mathbb{R}^3$, $u = (u_1, u_2, u_3)^* \in \mathbb{R}^3$, $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ — матрицы размера (3×3) .

Для модели (24), (25) имеем

$$u_1 = (1, 0, 0), \quad u_2 = (0, 1, 0)^*, \quad u_3 = (0, 0, 1),$$

$$B_1 = - \begin{pmatrix} \tilde{b}_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{b}_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{b}_3^{-1} \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} \left(\tilde{b}_1^{-1}\right)^2 (\tilde{a}_{11} - 1) & \tilde{b}_1^{-1} \tilde{b}_2^{-1} \tilde{a}_{12} & \tilde{b}_1^{-1} \tilde{b}_3^{-1} \tilde{a}_{13} \\ \tilde{b}_2^{-1} \tilde{b}_1^{-1} \tilde{a}_{21} & \left(\tilde{b}_2^{-1}\right)^2 (\tilde{a}_{22} - 1) & \tilde{b}_2^{-1} \tilde{b}_3^{-1} \tilde{a}_{23} \\ \tilde{b}_3^{-1} \tilde{b}_1^{-1} \tilde{a}_{31} & \tilde{b}_3^{-1} \tilde{b}_2^{-1} \tilde{a}_{32} & \left(\tilde{b}_3^{-1}\right)^2 (\tilde{a}_{33} - 1) \end{pmatrix},$$

$$B_3 = - \begin{pmatrix} \left(\tilde{b}_1^{-1}\right)^2 \sum_{k=1}^3 \tilde{b}_k^{-1} a_{1k} a_{k1} & \tilde{b}_1^{-1} \tilde{b}_2^{-1} \sum_{k=1}^3 \tilde{b}_k^{-1} a_{1k} a_{k2} & \tilde{b}_1^{-1} \tilde{b}_3^{-1} \sum_{k=1}^3 \tilde{b}_k^{-1} a_{1k} a_{k3} \\ \tilde{b}_2^{-1} \tilde{b}_1^{-1} \sum_{k=1}^3 \tilde{b}_k^{-1} a_{2k} a_{k1} & \left(\tilde{b}_2^{-1}\right)^2 \sum_{k=1}^3 \tilde{b}_k^{-1} a_{2k} a_{k2} & \tilde{b}_2^{-1} \tilde{b}_3^{-1} \sum_{k=1}^3 \tilde{b}_k^{-1} a_{2k} a_{k3} \\ \tilde{b}_3^{-1} \tilde{b}_1^{-1} \sum_{k=1}^3 \tilde{b}_k^{-1} a_{3k} a_{k1} & \tilde{b}_3^{-1} \tilde{b}_2^{-1} \sum_{k=1}^3 \tilde{b}_k^{-1} a_{3k} a_{k2} & \left(\tilde{b}_3^{-1}\right)^2 \sum_{k=1}^3 \tilde{b}_k^{-1} a_{3k} a_{k3} \end{pmatrix},$$

где

$$a_{ii} = \tilde{a}_{ii} - 1, \quad i = \overline{1, 3}, \quad a_{ij} = \tilde{a}_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, 3}.$$

Тогда для модели (24), (25)

$$B_1 u_1 = \begin{pmatrix} -\tilde{b}_1^{-1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tilde{b}_2^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\tilde{b}_3^{-1} \end{pmatrix}, \quad (26)$$

$$B_2 u_1 = \begin{pmatrix} \left(\tilde{b}_1^{-1}\right)^2 (\tilde{a}_{11} - 1) \\ \tilde{b}_2^{-1} \tilde{b}_1^{-1} \tilde{a}_{21} \\ \tilde{b}_3^{-1} \tilde{b}_1^{-1} \tilde{a}_{31} \end{pmatrix}, \quad B_2 u_2 = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1^{-1} \tilde{b}_2^{-1} \tilde{a}_{12} \\ \left(\tilde{b}_2^{-1}\right)^2 (\tilde{a}_{22} - 1) \\ \tilde{b}_3^{-1} \tilde{b}_2^{-1} \tilde{a}_{32} \end{pmatrix},$$

$$B_2 u_3 = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1^{-1} \tilde{b}_3^{-1} \tilde{a}_{13} \\ \tilde{b}_2^{-1} \tilde{b}_3^{-1} \tilde{a}_{23} \\ \left(\tilde{b}_3^{-1}\right)^2 (\tilde{a}_{33} - 1) \end{pmatrix}, \quad (27)$$

$$B_3 u_1 = \begin{pmatrix} -\left(\tilde{b}_1^{-1}\right)^2 \sum_{k=1}^3 \tilde{b}_k^{-1} a_{1k} a_{k1} \\ -\tilde{b}_2^{-1} \tilde{b}_1^{-1} \sum_{k=1}^3 \tilde{b}_k^{-1} a_{2k} a_{k1} \\ -\tilde{b}_3^{-1} \tilde{b}_1^{-1} \sum_{k=1}^3 \tilde{b}_k^{-1} a_{3k} a_{k1} \end{pmatrix}, \quad B_3 u_2 = \begin{pmatrix} -\tilde{b}_1^{-1} \tilde{b}_2^{-1} \sum_{k=1}^3 \tilde{b}_k^{-1} a_{1k} a_{k2} \\ -\left(\tilde{b}_2^{-1}\right)^2 \sum_{k=1}^3 \tilde{b}_k^{-1} a_{2k} a_{k2} \\ -\tilde{b}_3^{-1} \tilde{b}_2^{-1} \sum_{k=1}^3 \tilde{b}_k^{-1} a_{3k} a_{k2} \end{pmatrix},$$

$$B_3 u_3 = \begin{pmatrix} -\tilde{b}_1^{-1} \tilde{b}_3^{-1} \sum_{k=1}^3 \tilde{b}_k^{-1} a_{1k} a_{k3} \\ -\tilde{b}_2^{-1} \tilde{b}_3^{-1} \sum_{k=1}^3 \tilde{b}_k^{-1} a_{2k} a_{k3} \\ -\left(\tilde{b}_3^{-1}\right)^2 \sum_{k=1}^3 \tilde{b}_k^{-1} a_{3k} a_{k3} \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$a_{ii} = \tilde{a}_{ii} - 1, \quad i = \overline{1, 3}, \quad a_{ij} = \tilde{a}_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, 3}.$$

Из (26) следует, что для любого $i = \overline{1, 3}$

$$\text{rang} \{B_1 u_i, B_2 u_i, B_3 u_i\} = \text{rang} \{B_2 u_i, B_3 u_i\} + 1.$$

В то же время, вследствие (27) и (28), $\forall i = \overline{1, 3} \quad \text{rang} \{B_2 u_i, B_3 u_i\} = 2$ тогда и только тогда, когда

$$a_{2i} \sum_{k=1}^3 \tilde{b}_k^{-1} a_{3k} a_{ki} \neq a_{3i} \sum_{k=1}^3 \tilde{b}_k^{-1} a_{2k} a_{ki}, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Отсюда из теоремы 1 следует утверждение теоремы 4.

Т е о р е м а 4. Пусть в трехсекторной модели (24), (25) технологическое множество P_T замкнуто. Тогда существует такое $i = \overline{1, 3}$, что

$$a_{2i} \sum_{k=1}^3 \tilde{b}_k^{-1} a_{3k} a_{ki} = a_{3i} \sum_{k=1}^3 \tilde{b}_k^{-1} a_{2k} a_{ki},$$

где

$$a_{ii} = \tilde{a}_{ii} - 1, \quad i = \overline{1, 3}, \quad a_{ij} = \tilde{a}_{ij}, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, 3}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнов А.В., Павлова Н.Г. О топологических свойствах множества достижимости линейных систем // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. № 2. С. 1564–1566.
2. Батищева С.Э., Каданэр Э.Д., Симонов П.М. Экономико-математическое моделирование. П.: ПГУ, 2010.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-04601).

Поступила в редакцию 26 мая 2015 г.

Bozhinskaya O.M., Pavlova N.G. TOPOLOGICAL PROPERTIES OF THE TECHNOLOGICAL SET IN LEONTIEV DYNAMIC MODEL WITH CONTINUOUS TIME

Topological properties of the technological set in Leontiev dynamical model with continuous time are analyzed. The function of non-production consumption is taken as a control. Necessary conditions of closedness of technological set are given.

Key words: linear controlled system; set of attainability.

Божинская Ольга Михайловна, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, аспирант кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: ymnitsa2008@yandex.ru

Bozhinskaya Olga Mikhailovna, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Post-graduate Student of the Department of Nonlinear Analysis and Optimization, e-mail: ymnitsa2008@yandex.ru

Павлова Наталья Геннадьевна, Российский университет дружбы народов, г. Москва, Российская Федерация, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации, e-mail: natasharussia@mail.ru

Pavlova Natalia Gennadievna, Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, the Russian Federation, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Nonlinear Analysis and Optimization, e-mail: natasharussia@mail.ru